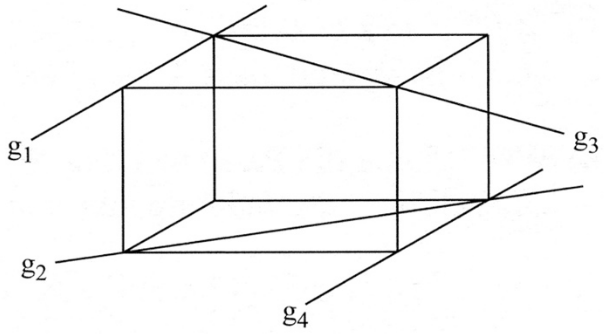
Jochen Weber

Lagebeziehungen von Geraden



parallele Geraden: g_1 und g_4

sich schneidende Geraden: g_1 und g_3; g_2 und g_4

windschiefe Geraden: g_1 und g_2; g_2 und g_3; g_3 und g_4

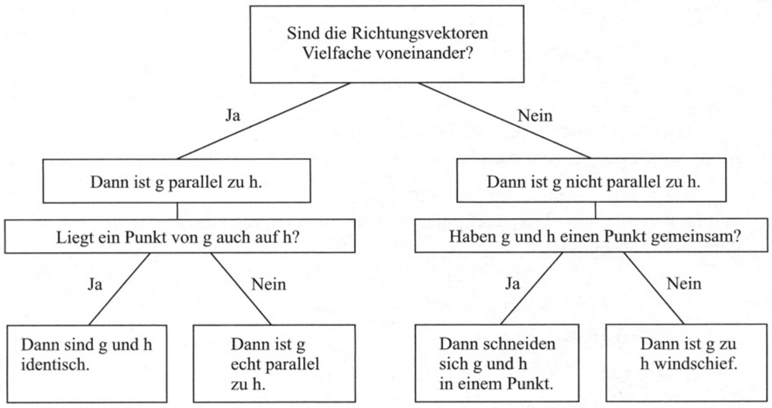
Strategie zum Bestimmen der gegenseitigen Lage zweier Geraden im Raum

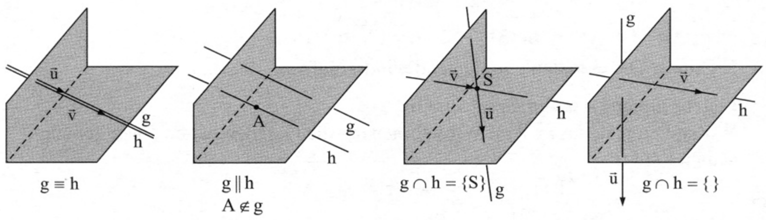
Die Geraden seien gegeben durch:

$g: \vec{x} = \vec{p}_1 + k \cdot \vec{u}$ bzw.

$h: \vec{x} = \vec{p}_2 + r \cdot \vec{v}$ mit $k, r \in \mathbb{R}$

Wir prüfen:





$g \equiv h$ | $g \parallel h$, $A \notin g$ | $g \cap h = \{S\}$ | $g \cap h = \{\}$

Aufgaben:

1 Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $k \in \mathbb{R}$ und der Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$.

2 Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $k \in \mathbb{R}$ und der Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$.

3.0 Im $\mathbb{R}^3$ sind zwei Geraden g und h gegeben. Entscheiden Sie begründet, welche der folgenden Aussagen auf keinen Fall zutreffen können (ohne Hilfsmittel).

3.1 Die Richtungsvektoren von g und h sind kollinear und es gibt genau einen gemeinsamen Punkt von g und h.

3.2 Die Geraden g und h sind parallel und es gibt gemeinsame Punkte.

3.3 Die Geraden g und h sind windschief und die Richtungsvektoren sind linear abhängig.

3.4 Die Richtungsvektoren von g und h sind linear unabhängig und die beiden Geraden haben genau einen gemeinsamen Punkt.

3.5 Die Richtungsvektoren von g und h sind nicht kollinear und die beiden Geraden haben mehrere gemeinsame Punkte.

3.6 Die Geraden g und h sind echt parallel und ihre Richtungsvektoren sind kollinear.

<u>Lösungen:</u>

1

Prüfen, ob die Richtungsvektoren linear unabhängig sind:

$$a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{r}_g$ und $\vec{r}_h$ linear unabhängig $\quad \Rightarrow$ g und h schneiden sich oder sind windschief

Gleichsetzen der Geradengleichungen g und h:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$(I) \Rightarrow k = \frac{3}{2} \qquad (II) \Rightarrow t = -1$

k und t in (III): $\frac{3}{2} = 4 - (-1) \quad \Rightarrow \frac{3}{2} = 5$

$\Rightarrow$ g und h sind windschief

2

Richtungsvektoren von g und h sind linear abhängig, also sind g und h parallel oder identisch.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (III) \Rightarrow 0 = 5 \quad \Rightarrow (3/2/0) \notin h$$

$\Rightarrow$ g und h sind echt parallel

3.1 Kann nicht sein. Da die Richtungsvektoren kollinear sind, sind die beiden Geraden entweder identisch oder echt parallel.

3.2 Kann sein.

3.3 Kann nicht sein. Wenn die Richtungsvektoren linear abhängig sind, dann sind sie kollinear, d.h. die Geraden sind nicht parallel zueinander.

3.4 Kann sein.

3.5 Kann nicht sein. Wenn die Richtungsvektoren nicht kollinear sind, können die Geraden nicht identisch sein, d.h. sie haben maximal einen gemeinsamen Punkt.

3.6 Kann sein.

Schnittwinkel zwischen zwei Geraden:

Der Schnittwinkel φ zwischen zwei Geraden g und h der Ebene ($\mathbb{R}^2$) oder des Raumes ($\mathbb{R}^3$) kann mit Hilfe der beiden Richtungsvektoren $\vec{r}_g$ und $\vec{r}_h$ wie folgt berechnet werden:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{r}_g \circ \vec{r}_h\right|}{\left|\vec{r}_g\right| \cdot \left|\vec{r}_h\right|}$$

Beispiel:

Bestimmen Sie den Schnittwinkel φ der beiden Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -15 + 18 - 21 = -18$$

$$\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-7)^2} = \sqrt{94} \qquad \left|\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{43}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{|-18|}{\sqrt{94} \cdot \sqrt{43}} \approx 0{,}2831 \quad \Rightarrow \varphi \approx 73{,}55°$$

Bemerkung:

Mit Hilfe der Formel kann auch der Winkel zwischen zwei windschiefen Geraden g und h berechnet werden.

Normalenform der Geradengleichung im $\mathbb{R}^2$:

Geradengleichung im $\mathbb{R}^2$: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$

Verwandeln in Normalenform:

Multiplikation der Geradengleichung mit dem „Normalenvektor“ (Vektor, der auf dem Richtungsvektor der Geraden senkrecht steht).

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg| \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

Ausrechnen der Skalarprodukte:

$-x_1 + 3x_2 = -2 + 9 + 0 \quad \Rightarrow -x_1 + 3x_2 = 7 \quad \Rightarrow -x_1 + 3x_2 - 7 = 0$ "Normalenform der Geraden im $\mathbb{R}^2$"

Allgemeine Formel:

$$\vec{n} \circ \left(\vec{x} - \vec{a} \right) = 0 \qquad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$\vec{n}$ ist Normalenvektor und $\vec{a}$ ist Ortsvektor des Aufhängepunktes

Bemerkung:

Das Aufstellen der Normalenform einer Geraden im $\mathbb{R}^3$ ist nicht möglich.

Aufgaben:

1 Prüfen Sie, ob der Punkt C(1/2) auf der Geraden g: $-x_1 + 3x_2 - 7 = 0$ liegt.

2 Bestimmen Sie eine Normalenform der Geraden g, die durch die Punkte A(-3/7) und B(6/2) geht und prüfen Sie, ob die Punkte C(7/-2) und D(-12/12) auf dieser Geraden g liegen.

Lösungen:

1

Einsetzen der Koordinaten von C in g:

$-1+3\cdot 2-7=0 \quad \Rightarrow -2=0 \quad \Rightarrow C\notin g$

2

$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}+k\cdot\left[\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}\right] \quad \Rightarrow g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}9\\-5\end{pmatrix}$

Umwandeln in Normalenform:

$\vec{n}=\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}$

$g:\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}\right]=0 \quad \Rightarrow g:5(x_1+3)+9(x_2-7)=0 \quad \Rightarrow g:5x_1+9x_2-48=0$

$\Rightarrow 5\cdot 7+9\cdot(-2)-48=0 \quad \Rightarrow -31=0 \quad \Rightarrow C\notin g$

$\Rightarrow 5\cdot(-12)+9\cdot 12-48=0 \quad \Rightarrow 0=0 \quad \Rightarrow D\in g$